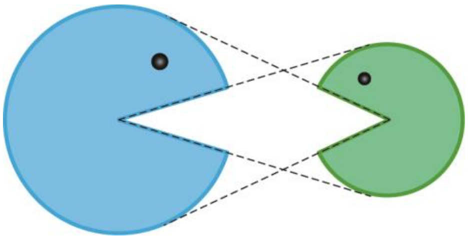
26 眼球定理…蝴蝶定理的翻版

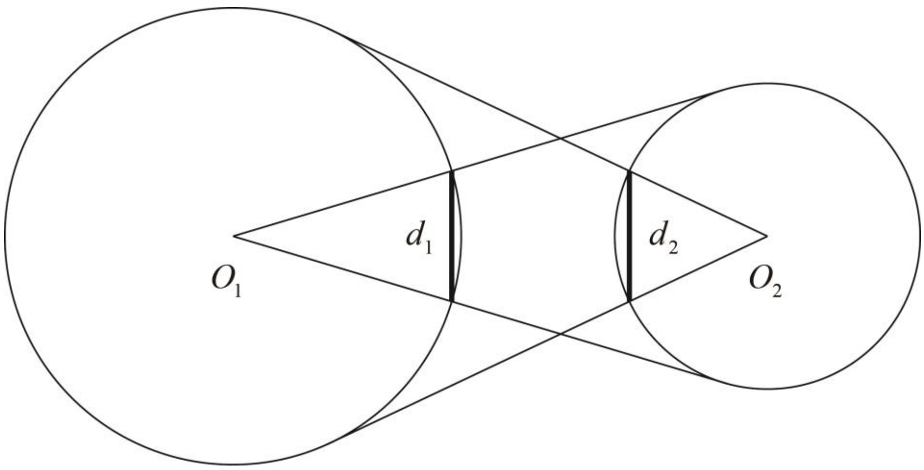
學幾何的人都喜歡將所學的幾何定理用生活中的事物來比喻，這裡所要介紹的「眼球定理」就是一個實例。

不過個人比較想要把眼球定理想成大小精靈互吃對方的定理，相想看，大小精靈互相看對方不順眼時，都張大他們的嘴巴，想把對方一口給吃掉：



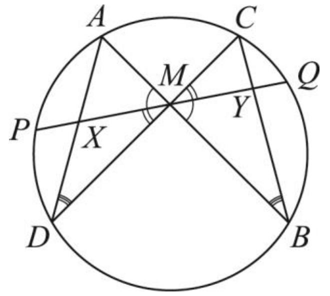
其樣子不是很像「眼球定理」中的圖形嗎？

如下圖所示，圓O_1與O_2是兩的相離的圓，從圓心O_1向圓O_2引公切線，這兩條公切線會與圓O_1交於兩點，令這兩點的距離為d_1；同樣地，從圓心O_2向圓O_1引公切線，這兩條公切線會與圓O_2交於兩點，令這兩點的距離為d_2：

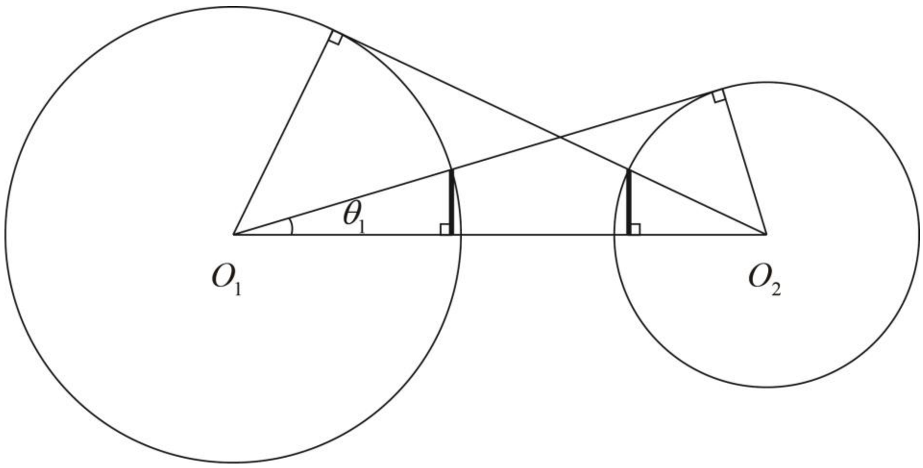


討論d_1與d_2的大小關係。

這定理初看之下可能無解題的方向感，但仔細分析之後，就知道不難，利用國中直角三角形的相似性質或高中正弦函數的性質。在證明眼球定理之前，讓我們來欣賞一道與眼球定理有異曲同工之妙的幾何定理。下圖是有名的蝴蝶定理之圖形，該定理是以圖中有貌似蝴蝶的形體來命名，有興趣的讀者不妨上網查一下何謂蝴蝶定理：



讓我們來證明眼球定理：如下圖所示，令圓O_1與O_2的半徑分別為r_1與r_2，從圓心O_1向圓O_2所引公切線與直線O_1O_2的夾角為θ_1：



利用正弦函數的定義，得

$$\frac{\frac{d_1}{2}}{r_1} = \sin\theta_1 = \frac{r_2}{\overline{O_1O_2}},$$

即

$$d_1 = \frac{2r_1r_2}{\overline{O_1O_2}}.$$

同理，可以從圓O_2得到

$$d_2 = \frac{2r_1r_2}{O_1O_2}.$$

故 $d_1 = d_2$ 。